## Exercices sur les charges discrètes

**Exercice 01:**

Soient 03 charges électriques ponctuelles telles que $Q_1$ = - 3 µC, $Q_2$ = 4 µC et $Q_3$ = 5 µC et disposées comme suit:

$Q_1$ (2, 0) m, $Q_2$(0, 3)m et $Q_3$(3, 5)m.

a) Déterminer puis représenter la force $\vec{F}_{1,2/3}$ exercée par les charges $Q_1$ et $Q_2$ sur $Q_3$.

b) Déterminer puis représenter le champ électrique $\vec{E}$ dû à l'existence de ces 03 charges au point origine O(0, 0).

c) Calculer le potentiel V dû à ces 03 charges au point O(0, 0).

d) On ajoute une charge $Q_O$ = 7 µC au point O(0, 0). Déterminer la force $\vec{F}_{1,2,3/4}$ au point O(0, 0).

## Exercices sur les charges continues

**Exercice 02:**

Soit une ligne de longueur infinie chargée par une densité de charge linéique $\lambda > 0$.

a) Trouver l'expression du champ électrique $\vec{E}$ au point P à une distance x de cette ligne.

b) Déduire l'expression du potentiel V au point P.

**Exercice 03:**

Soit une ligne de forme circulaire de rayon R et portant une densité linéique de charges $\lambda > 0$. Trouver le champ électrique $\vec{E}$ à une distance y sur l'axe perpendiculaire à son plan.

**Exercice 04:**

Soit un disque de rayon R chargé par une densité surfacique $\sigma > 0$.

a) Donner l'expression du camp électrique $\vec{E}$ au point P situé sur l'axe perpendiculaire au plan disque.

b) Déduire le potentiel V en ce point P.

**Solution Exercice 01:**

a) Déterminons la force $\vec{F}_{1,2/3}$ exercée par les charges $Q_1$ et $Q_2$ sur $Q_3$.

Les positions des charges sont données en 02 coordonnées donc nous allons travailler en 02 dimensions; c'est à dire dans un plan.

D'après le principe de superposition on a:

$$\vec{F}_{1,2/3} = \vec{F}_{1/3} + \vec{F}_{2/3}$$

On calcul chaque force à part puis on fait la somme vectorielle.

$$\vec{F}_{1/3} = K\frac{Q_1Q_3}{(d_{13})^2}\vec{u}_{13}$$

Dans ce cas, l'utilisation de la loi de Coulomb sous la forme de l'équation (32) facilite le calcul, soit donc:

$$\vec{F}_{1/3} = K\frac{Q_1Q_3}{(AC)^2}\frac{\overrightarrow{AC}}{AC}$$

avec: $\overrightarrow{AC} = \vec{\imath} + 5\vec{\jmath} \Rightarrow AC = \sqrt{1^2 + 5^2} = \sqrt{26}$ m

A.N:

$Q_1Q_3 = -15\times10^{-12}$ C, $K = 9\times10^9$, $(AC)^2 = 26$ m$^2$, d'où:

$$\vec{F}_{1/3} = -\frac{135\times10^{-3}}{26}\frac{(\vec{\imath}+5\vec{\jmath})}{\sqrt{26}} \approx -10^{-3}(1{,}02\vec{\imath} + 5{,}10\vec{\jmath})$$

de même, on calcul la force $\vec{F}_{2/3}$:

$$\vec{F}_{2/3} = K\frac{Q_2Q_3}{(BC)^2}\frac{\overrightarrow{BC}}{BC}$$

avec $\overrightarrow{BC} = 3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} \Rightarrow BC = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}\,m$

$Q_2Q_3 = 20\times10^{-12}$ C$^2$, soit donc:

$$\vec{F}_{2/3} = \frac{180\times10^{-3}}{13}\frac{(3\vec{\imath}+2\vec{\jmath})}{\sqrt{13}} \approx 10^{-3}(11{,}52\vec{\imath} + 7{,}68\vec{\jmath})$$

En fin de compte nous calculons la force $\vec{F}_{1,2/3}$:

$$\vec{F}_{1,2/3} = -10^{-3}\big((1{,}02\vec{\imath} + 5{,}10\vec{\jmath}) + (11{,}52\vec{\imath} + 7{,}68\vec{\jmath})\big) = 10^{-3}(10{,}50\vec{\imath} + 2{,}58\vec{\jmath})$$

le module de la force $\vec{F}_{1,2/3}$ est:

$$F_{1,2/3} = 10^{-3}[(10{,}49)^2 + (2{,}58)^2]^{\frac{1}{2}} = 10{,}80\times10^{-3}N$$

La représentation de cette force est la suivante:

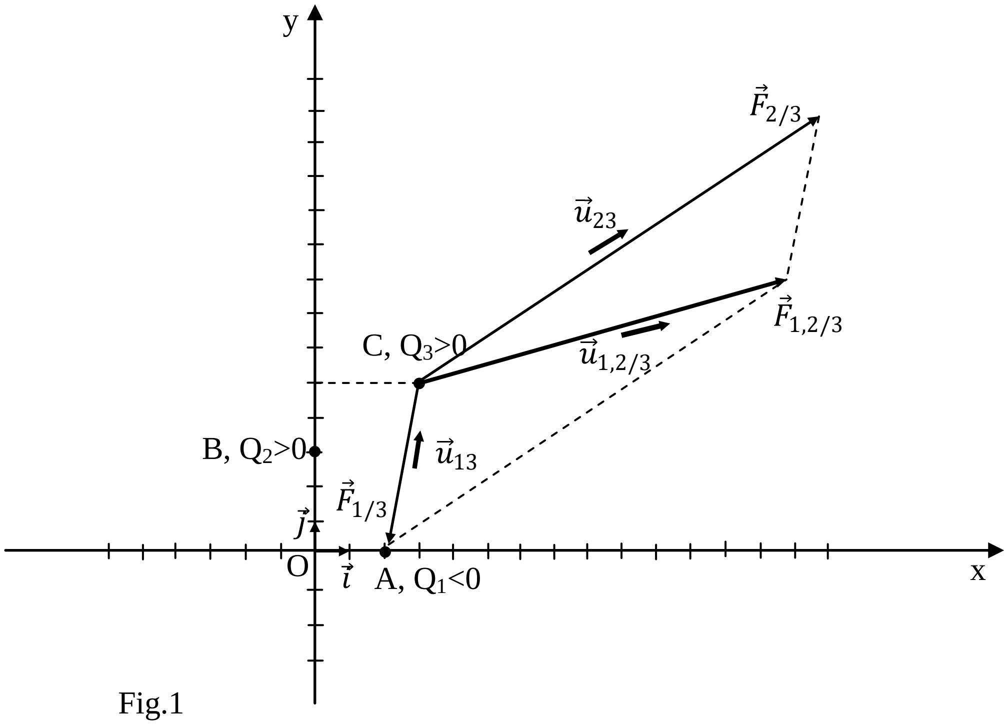

Fig.1

b) Déterminons le champ électrique $\vec{E}$ au point O(0, 0).

Ici aussi on applique le principe de superposition pour le champ électrique $\vec{E}$:

$\vec{E}_O = \vec{E}_{1O} + \vec{E}_{2O} + \vec{E}_{3O}$

avec: $\vec{E}_{1O} = K\frac{Q_1}{(AO)^2}\vec{u}_{AO}$

$\vec{E}_{2O} = K\frac{Q_2}{(BO)^2}\vec{u}_{BO}$

$\vec{E}_{3O} = K\frac{Q_3}{(CO)^2}\vec{u}_{CO}$

A.N:

$\vec{E}_{1O} = 9\times10^9\frac{-3\times10^{-6}}{(2)^2}(-\vec{\imath}) = 6{,}75\times10^3\vec{\imath}$

$\vec{E}_{2O} = K\frac{Q_2}{(BO)^2}\vec{u}_{BO} = 9\times10^9\frac{4\times10^{-6}}{(3)^2}(-\vec{\jmath}) = -4\times10^3\vec{\jmath}$

$\vec{E}_{3O} = K\frac{Q_3}{(CO)^2}\vec{u}_{CO} = 9\times10^9\frac{5\times10^{-6}}{34}\frac{(-3\vec{\imath}-5\vec{\jmath})}{\sqrt{34}} \approx -0{,}23\times10^3(3\vec{\imath}+5\vec{\jmath})$

d'où, le champ total $\vec{E}_O$ appliqué au point O(0, 0) est:

$\vec{E}_O = 10^3\times(6{,}06\vec{\imath} - 5{,}15\vec{\jmath})$ et son intensité est:

$\mathrm{E_O} = 10^3\sqrt{(6{,}06)^2+(5{,}15)^2} = 7{,}95\times10^3\ \mathrm{V/m}$

Représentons $\vec{E}_O$ dans la figure 04 ci-dessous:

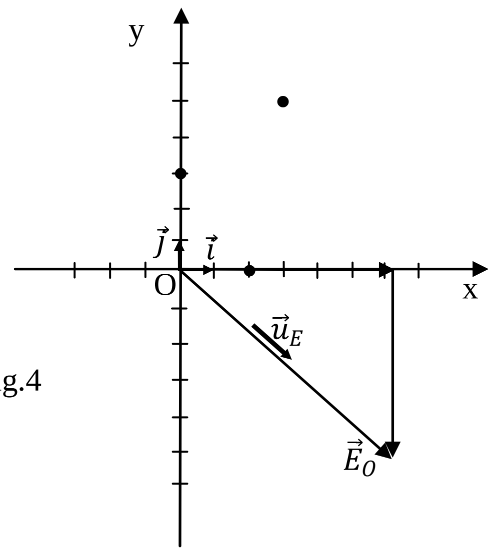

Fig.4

c) Calcul du potentiel V au point O(0, 0).

On a:

$V_O = \bar{V}_{10} + \bar{V}_{20} + \bar{V}_{30}$

Avec la formule $V = K\frac{Q}{d}$

A.N: $\bar{V}_{10} = 9 \times 10^9 \times \frac{-3\times10^{-9}}{2} = -13{,}5V$

$\bar{V}_{20} = 9 \times 10^9 \times \frac{4\times10^{-9}}{3} = 12V$

$\bar{V}_{30} = 9 \times 10^9 \times \frac{5\times10^{-9}}{\sqrt{34}} = 7{,}72V$ , d'où:

$V_O = 6{,}22$ V

d) Calculons la force au point O.

Comme on a déjà calculé $\vec{E}_O$ il nous suffit d'appliquer la relation:

$\vec{F} = q\vec{E}$

Dans notre cas on aura:

$\vec{F}_O = Q_O\vec{E}_O = 7 \times 10^{-9} \times (3{,}75\vec{i} + 5{,}25\vec{j}\ )$ et le module de $\vec{F}_O$ est:

$F_O = 7 \times 10^{-9} \times \sqrt{(3{,}75)^2 + (5{,}25)^2} = 45{,}15 \times 10^{-9}$N

Les valeurs sont très petites car les charges mises en jeu sont très petites et les distances sont très grandes.

**Solution exercice 02:**

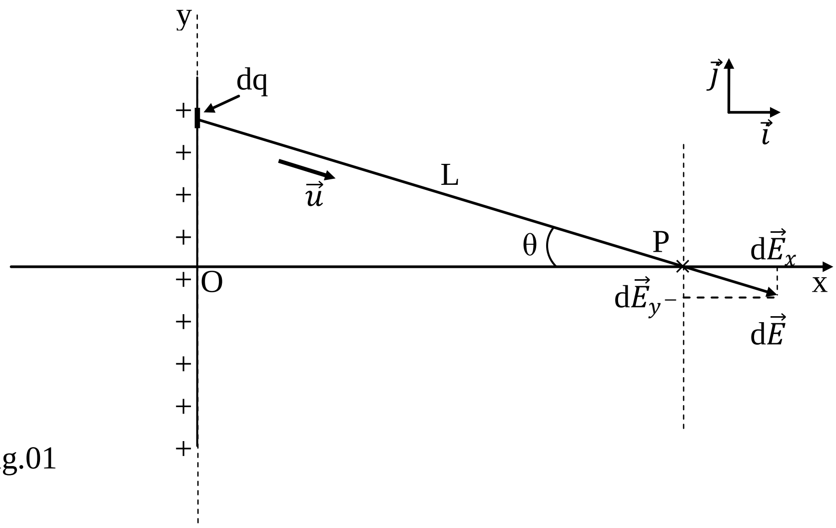


Fig.01

Dans ce cas on a une infinité de charges, donc on ne peut pas utiliser l'équation (39) mais on utilise la somme intégrale donnée dans l'équation (54), c'est à dire:

$$\vec{E} = K\int \frac{dq}{L^2}\vec{u} \qquad (1)$$

On a une densité linéique, ce qui veut dire que:

$$q = \lambda \times y \Rightarrow dq = \lambda dy, \qquad (2)$$

soit donc, en remplaçant (2) dans (1):

$$\vec{E} = K\int \frac{\lambda dy}{L^2}\vec{u} = K\lambda \int \frac{dy}{L^2}\vec{u}\ , \qquad (3)$$

K et λ sont des constantes on peut les faire sortir de l'intégrale.

D'après la figure 01 on a:

$$cos(\theta) = \frac{x}{L} \Rightarrow L = \frac{x}{cos(\theta)} \Rightarrow L^2 = \frac{x^2}{\left(cos(\theta)\right)^2} \qquad (4)$$

$$tan(\theta) = \frac{y}{x} \Rightarrow d(tan(\theta)) = \frac{dy}{x} \qquad (x = \text{cste}) \qquad (5)$$

Or

$$tan(\theta) = \frac{sin(\theta)}{cos(\theta)} \Rightarrow \frac{d\left(tan(\theta)\right)}{d\theta} = \frac{1}{\left(cos(\theta)\right)^2} \Rightarrow d\big(tan(\theta)\big) = \frac{d\theta}{\left(cos(\theta)\right)^2} \qquad (6)$$

remplaçons (6) dans (5) on obtient:

$$\frac{dy}{x} = \frac{d\theta}{\left(cos(\theta)\right)^2} \Rightarrow dy = \frac{xd\theta}{\left(cos(\theta)\right)^2} \qquad (7)$$

En remplaçons (4) et (7) dans (3) on obtient:

$$\vec{E} = K\lambda \int \frac{\left(\frac{xd\theta}{(cos\,(\theta))^2}\right)}{\left(\frac{x^2}{(cos\,(\theta))^2}\right)} = \frac{K\lambda}{x} \int d\theta\, \vec{u} \qquad (8)$$

D'après la figure 01, la décomposition du $d\vec{E}$ nous donne:

$$d\vec{E} = d\vec{E}_x + d\vec{E}_y \qquad (9)$$

avec $d\vec{E}_x = dE_x\vec{\imath}$ et $d\vec{E}_y = dE_x\vec{\jmath}$

et $d(E_x) = d(E\cos(\theta))$, $d(E_y) = d(E\sin(\theta))$, d'où:

$$E_x = \int d(Ecos(\theta)) \qquad (10)$$

$$E_y = \int d(Esin(\theta)) \qquad (11)$$

(8) et (10) $\Rightarrow E_{x1} = \frac{K\lambda}{x} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\theta)\, d\theta$ (12)

(8) et (11) $\Rightarrow E_{y1} = \frac{K\lambda}{x} \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin(\theta) d\theta$ (13)

(12) $\Rightarrow E_{x1} = +\frac{K\lambda}{x}$ (14)

(13= $\Rightarrow E_{y1} = -\frac{K\lambda}{x}$ (15)

Dans le résonnement précédent nous avons pris en considération que la partie supérieure de la ligne de 0 à $+\frac{\pi}{2}$, pour prendre toute la charge il faut ajouter la partie inférieure de la ligne de $-\frac{\pi}{2}$ à 0, et dans ce cas on aura:

$$E_{x2} = \frac{K\lambda}{x} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cos(\theta)\, d\theta = +\frac{K\lambda}{x} \qquad (16)$$

$$E_{y2} = \frac{K\lambda}{x} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} sin(\theta) d\theta = +\frac{K\lambda}{x} \qquad (17)$$

En fin de compte on aura:

$$E_x = E_{x1} + E_{x2} = +\frac{K\lambda}{x} + \frac{K\lambda}{x} = \frac{2K\lambda}{x} \qquad (18)$$

$$E_y = E_{y1} + E_{y2} = -\frac{K\lambda}{x} + \frac{K\lambda}{x} = 0 \qquad (19)$$

Et comme résultat final on obtient le champ électrique $\vec{E}$ au point P selon l'axe des 'x':

$\vec{E}_x = \frac{2K\lambda}{x}\vec{\imath}$ et le module est:$E_x = \frac{2K\lambda}{x}$.

**Solution exercice 3:**

Par raison de symétrie on a le champ électrique $\vec{E}$ que selon l'axe des 'y'. En effet, selon l'axe des 'x' les composantes de $\vec{E}$ s'annulent deux à deux, voir schéma de la figure 01. De ce fait le résultat final de $\vec{E}$ sera:

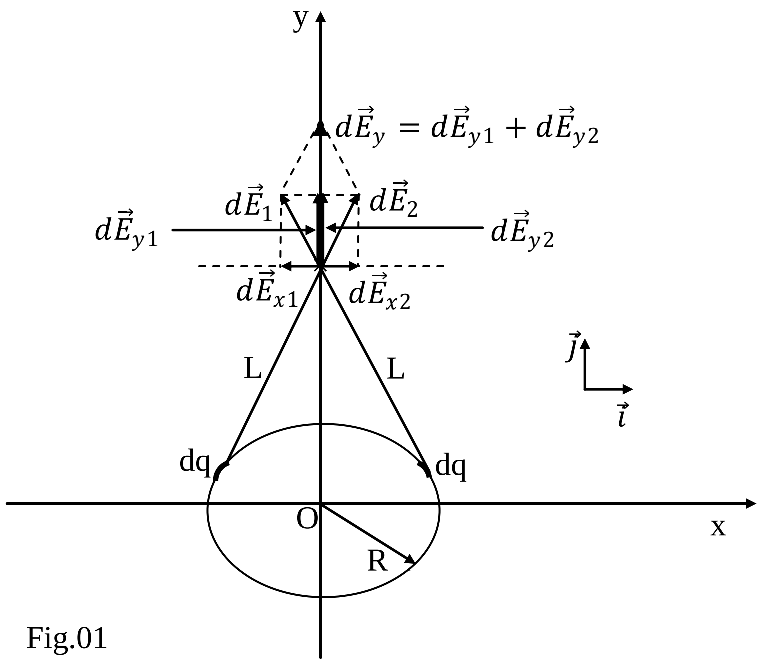


Fig.01

$\vec{E} = \vec{E}_y = E_y\vec{j}$

$dE = K\frac{dq}{L^2} \Rightarrow E = K\int\frac{dq}{L^2} = K\frac{q}{L^2}$ or $dE_y = dE\cos(\theta)$, avec $\cos(\theta)=y/L$, d'où:

$dE_y = \frac{y}{L}dE \Rightarrow E_y = \frac{y}{L}E = \frac{y}{L}\times K\frac{q}{L^2} = K\frac{qy}{L^3} = Kq\frac{y}{(y^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}$

$E_y = K\frac{2\pi\lambda Ry}{(y^2+R^2)(y^2+R^2)^{\frac{1}{2}}} = 2\pi K\lambda R\frac{ydy}{(y^2+R^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\lambda Ry}{2\varepsilon_0(y^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}$ et puisque $\vec{E}$ et juste selon l'axe des 'y', donc on aura:

$\vec{E}_y = \frac{\lambda Ry}{2\varepsilon_0(y^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}\vec{j}$

b) Détermination de l'expression du potentiel V au point P.

Tous les point se trouvant sur la ligne en forme de cercle sont à égale distance d'un point P sur l'axe perpendiculaire au plan de la circonférence, voir le schéma de la figure 01, d'où:

$V = \frac{K}{L}\int dq = \frac{Kq}{L}$, avec $q = 2\pi\lambda R$ et $K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9\times 10^9$ et $L = \sqrt{y^2+R^2}$

c) Déduction du champ électrique E à partir du potentiel V.

D'après le schéma de la figure 01, le champ électrique E ne dépend que de la variable 'y', d'où:

$$E_y = -\frac{dV}{dy} = -Kq\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{(y^2+R^2)^{\frac{1}{2}}}\right) = \frac{K\lambda 2\pi Ry}{(y^2+R^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\lambda Ry}{2\varepsilon_0(y^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}$$

En conclusion on voit que le calcul de E est plus facile à partir du potentiel V qu'à partir du calcul direct.

**Solution exercice 04:**